Exemples de “Démos sans les mots” en trigonométrie directe et inverse

JEAN-BAPTISTE HIRIART-URRUTY & PATRICE LASSÈRE
Département de mathématiques
Université PAUL SABATIER de Toulouse

Résumé. Nous présentons des “Démos sans les mots” de 4 résultats choisis de trigonométrie : 2 en trigonométrie directe, 2 en trigonométrie inverse.

Mots-clés. Fonctions trigonométriques. Fonction arctangente.

Introduction

Les “Preuves sans mots”, traduction de l'anglais “Proofs without words”, auquel nous préférons l'appellation “Démos sans les mots” (la rime est plus riche !), est une manière de suggérer et de visualiser, à l'aide de dessins, certains résultats mathématiques. Il ne s'agit pas de démonstrations à proprement parler - on peut même se faire piéger par un dessin - mais d'illustrations graphiques à la manière d'un rébus, souvent convaincantes et parfois lumineuses, pour deviner (après une plus ou moins longue réflexion) la marche à suivre de la démonstration (rigoureuse) suggérée. Les ouvrages ([1] , [2] , [4]) sont des compilations de “Démos sans les mots” de résultats d'algèbre élémentaire, combinatoire, géométrie dans le plan, suites et séries, calcul différentiel et intégral. Certaines de ces visualisations graphiques sont un peu “tirées par les cheveux”, reconnaissons-le. D'autres, en majorité, sont fort intéressantes, parfois même inattendues et percutantes.

Nous avons pris le parti ici de présenter un échantillon limité de 4 exemples, choisis dans un domaine bien particulier des mathématiques, celui de la trigonométrie directe (celle concernant le sinus, le cosinus ou la tangente d'un angle) et inverse (concernant la fonction arctangente). Ils nous sont semblé particulièrement démonstratifs de ce qu'est une “Démo sans les mots”. Trois des quatre exemples sont des versions détaillées de choses présentées un peu succinctement dans ([1] , [2] , [4]), l'exemple de 2.1 (due au second auteur) est inédite à notre connaissance.

Les activités de recherche sur ces “Démos sans les mots” continuent toujours, témoin la note [5] centrée sur la fonction arctangente, le nombre d'or et l'inverse du nombre d'or.

1. Deux exemples en trigonométrie directe

Les deux exemples de visualisation qui vont suivre sont basés sur une même manière de faire, celle d'un "triangle rectangle (une équerre) s'appuyant par son sommet d'angle droit sur un mur vertical". Pour la comprendre, il suffit de regarder la Figure 1 ci-dessous [1] :

- Le triangle OBD, rectangle en B, est posé ou s'appuie sur le mur vertical ABC ; ainsi, il est facile de vérifier que l'angle α entre OA et OB se retrouve entre BC et BD ;

- L'angle $\alpha + \beta$ entre OA et OD est aussi celui entre DO et DE.

Il suffira ensuite de jouer avec les trois triangles rectangles OAB, OBD et BCD.

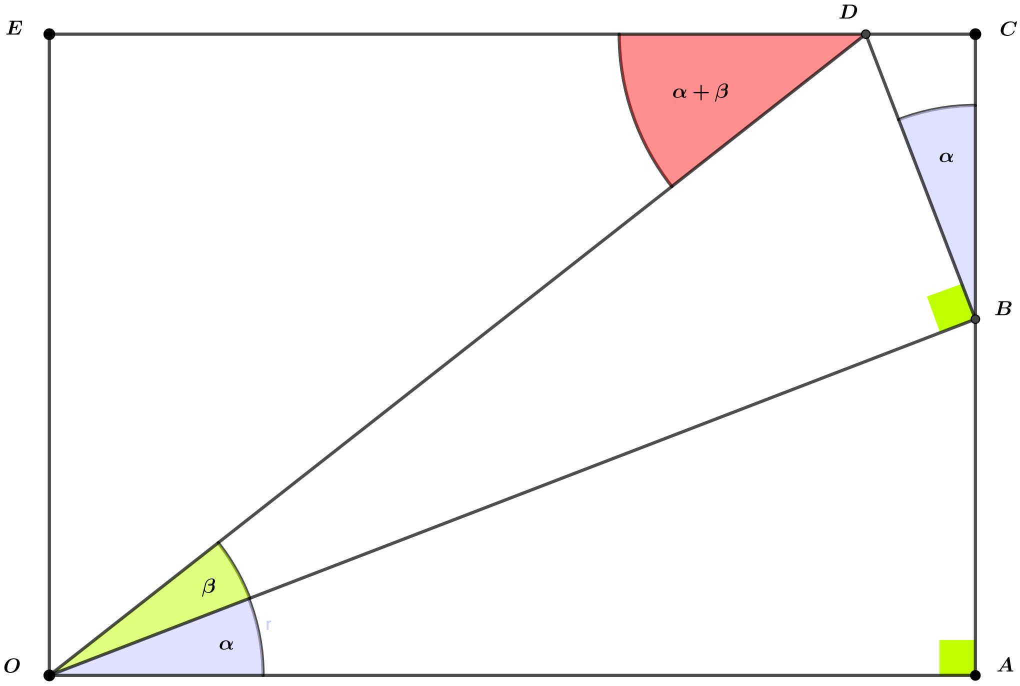

FIGURE 1 –

1.1 Le cosinus et le sinus de l'angle double

La formule de trigonométrie (directe) la plus célèbre, et sans doute la plus simple, est : $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$; c'est une élégante illustration du théorème de PYTHAGORE, valable pour tout angle α, et dont la visualisation est simple dans un triangle rectangle dont l'hypoténuse est de longueur 1 et l'un des angles α.

Juste après, ressemblant au signe près à celle que nous venons de rappeler, arrive la formule qui donne le cosinus de 2α en fonction du cosinus et du sinus de α : $\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)$. Elle est accompagnée de la formule qui donne le sinus de 2α en fonction du sinus et du cosinus de α : $\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha) \times \cos(\alpha)$. Bien que moins directe à visualiser que $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$, on peut néanmoins "voir" ces deux formules du cosinus et du

1. Les 5 figures de la présente note ont été réalisées avec le logiciel GeoGebra.

sinus de l'angle double à partir d'une figure construite selon la technique du "triangle rectangle s'appuyant sur un mur vertical". La voici ; suivre sur la Figure 2.

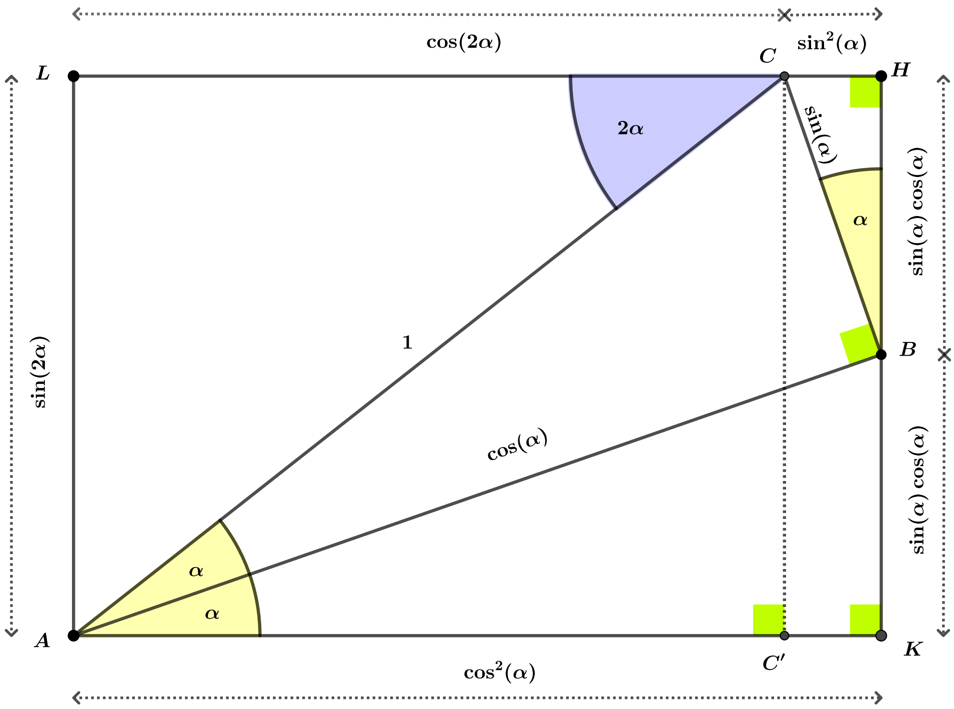

FIGURE 2 – $\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)$ et $\sin(2\alpha) = 2\cos(\alpha)\sin(\alpha)$.

Le triangle ABC, rectangle en B, d'hypoténuse 1 et d'angle α, est posé sur un mur vertical HK ; l'angle de pose, c'est-à-dire celui entre AB et le sol horizontal AK est de nouveau α. Il n'y a plus qu'à compléter par L de manière à avoir un rectangle $AKHL$. Voyons à présent ce que nous lisons sur cette figure :

- Dans le triangle rectangle ABC, $AB = \cos(\alpha)$ et $BC = \sin(\alpha)$.

- Dans le triangle rectangle AKB, $AK = AB \times \cos(\alpha) = \cos^2(\alpha)$ et $BK = AB \times \sin(\alpha) = \sin(\alpha) \times \cos(\alpha)$.

- Dans le triangle BHC, rectangle en H, $BH = BC \times \cos(\alpha) = \sin(\alpha) \times \cos(\alpha)$ et $CH = BC \times \sin(\alpha) = \sin^2(\alpha)$.

Tous les ingrédients sont là. Lisons maintenant les résultats sur le triangle rectangle restant ACL ou son symétrique ACC' :

$$\begin{aligned} AC' &= AC \times \cos(2\alpha) \ = \cos(2\alpha), \text{ ou bien} \\ AC' &= AK - C'K = AK - CH = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha). \end{aligned}$$

C'est bien l'illustration de la formule $\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)$.

Continuons avec

$$\begin{aligned} CC' &= AC \times \sin(2\alpha) \ = \sin(2\alpha), \text{ ou bien} \\ CC' &= BH + BK = 2\sin(\alpha) \times \cos(\alpha). \end{aligned}$$

On a ainsi visualisé la formule $\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha) \times \cos(\alpha)$.

1. 2 La tangente d'une somme d'angles

La formule donnant la tangente de $\alpha + \beta$ en fonction de la tangente de α et de la tangente de β est, disons-le tout de suite, un peu dangereuse et à manier avec prudence. Cette formule,

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan(\alpha) + \tan(\beta)}{1 - \tan(\alpha) \times \tan(\beta)}, \tag{1}$$

n'est pas valable pour n'importe quels α et β ; nous ne la considérons ici que dans un contexte sûr, à savoir lorsque $\alpha > 0$, $\beta > 0$ et $\alpha + \beta < \frac{\pi}{2}$.

Ici aussi, ou peut "voir" la formule (1) à partir d'une figure construite selon la technique du "triangle rectangle s'appuyant sur un mur vertical". La voici ; suivre sur la Figure 3.

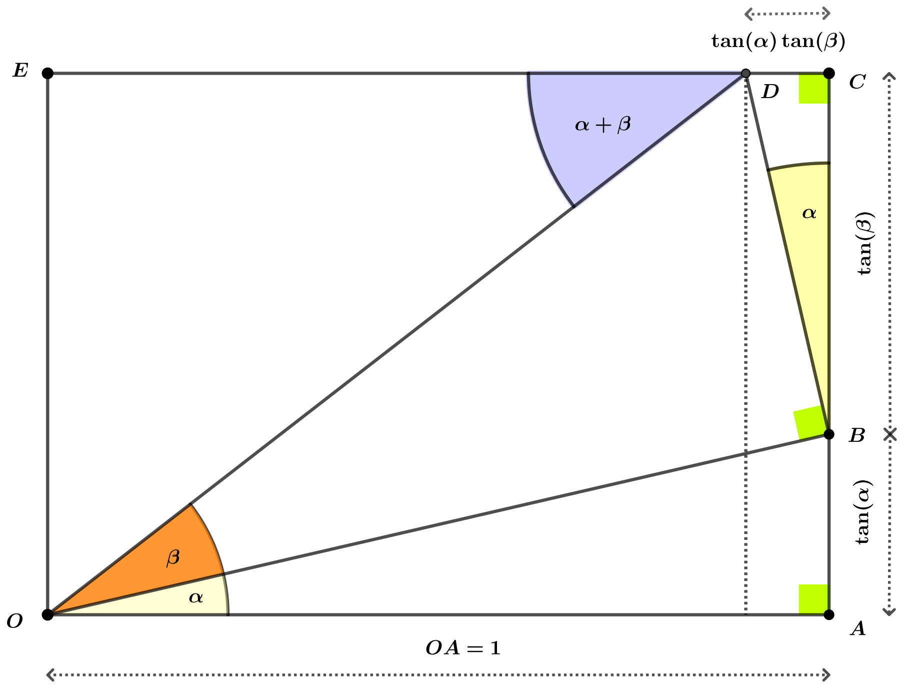

FIGURE 3 – $\tan(\alpha + \beta) = \dfrac{\tan(\alpha) + \tan(\beta)}{1 - \tan(\alpha) \times \tan(\beta)}$.

Le triangle OAB, rectangle en A, avec $OA = 1$, est posé au sol ; l'angle au sol, c'est-à-dire celui entre OA et OB est α. On pose sur OB un nouveau triangle, rectangle en B, et dont l'angle de pose sur OB est β. Ainsi apparaît un nouveau sommet D, et donc le triangle rectangle OBD. Il n'y a plus qu'à compléter par C et E de manière à avoir un rectangle $OACE$. Voyons à présent ce que nous lisons sur cette figure :

- Dans le triangle rectangle OAB, on "voit" directement $\tan(\alpha)$ puisque c'est AB (car $\tan(\alpha) = \frac{AB}{OA} = \frac{AB}{1}$). Dans le même triangle, $OB = \frac{1}{\cos(\alpha)}$.

- Dans le triangle rectangle OBD, $\tan(\beta) = \frac{BD}{OB}$, d'où $BD = \tan(\beta) \times OB = \frac{\tan(\beta)}{\cos(\alpha)}$.

- Dans le triangle BCD, rectangle en C, $BC = BD \times \cos(\alpha) = \tan(\beta)$. Ici on “voit” donc directement $\tan(\beta)$ puisque c'est BC. Dans le même triangle, $\tan(\alpha) = \frac{DC}{BC}$, d'où $DC = \tan(\alpha) \times \tan(\beta)$.

Etonnant que sur la même figure on voit $\tan(\alpha)$, $\tan(\beta)$, leur somme et leur produit. Tout est en place pour conclure. En effet :

$$\begin{aligned} OE &= AC = AB + BC = \tan(\alpha) + \tan(\beta), \\ ED &= EC - DC = OA - DC = 1 - \tan(\alpha) \times \tan(\beta); \\ \tan(\alpha + \beta) &= \frac{OE}{ED}. \end{aligned}$$

On a ainsi visualisé la formule (1).

2. Deux exemples de la trigonométrie inverse

Les deux exemples que nous présentons dans ce paragraphe traitent de la fonction arctangente ($y = \arctan(x)$ doit être lue dans sa tête comme “y est l'arc (l'angle) de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ dont la tangente est x).

2. 1 L'arctangente de x additionnée à celle de son inverse $\frac{1}{x}$

Dès la première année d'université, les étudiants sont amenés à démontrer la relation suivante :

$$\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2} \text{ pour tout } x \in \left]0, +\infty\right[\ ; \tag{2}$$

$$\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\pi}{2} \text{ pour tout } x \in \left]-\infty, 0\right[. \tag{3}$$

La méthode la plus efficace pour démontrer ce résultat est d'utiliser les résultats et techniques issues du calcul différentiel. La fonction $x \mapsto f(x) = \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ est dérivable pour tout $x \neq 0$ avec une dérivée $f'(x) = 0$. En conséquence, la fonction f est constante sur tout *intervalle* de $\mathbb{R}$ ne contenant pas 0. La valeur de la constante sur $\left]0, +\infty\right[$ (dans la situation (2)) s'obtient en prenant une valeur particulière de x, $x = 1$ par exemple, ou bien en déterminant $\lim_{x \to +\infty} f(x)$. Cet exercice est excellent pour deux raisons au moins. La première est qu'il illustre le fait qu'avoir une fonction f à dérivée nulle sur un ensemble I ne permet de déduire que f est constante sur I que lorsque I est un *intervalle*. La deuxième est plus subtile : bien qu'on soit tenté d'utiliser le fait (essentiel) que $\tan(\arctan(y)) = y$, la formule d'addition des tangentes, $\tan(a+b) = \frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}$, évoquée en (1), est inopérante ici. Pourtant, nous en avons vu l'utilisation, dans des forums de discussion comme dans des vidéos, où on divise allègrement par 0 (et on commente même le résultat en disant que cela doit faire $+\infty$!).

On “voit” la formule (2) sur la Figure 4 ci-dessous.

Soit en effet le triangle OAB, rectangle en A, avec $OA = 1$, $AB = x$, et d'angle α en O. Regardons dans le sens horizontal : Clairement - cela a été fait pour - $x = \tan(\alpha)$ et $\alpha = \arctan(x)$.

Regardons maintenant dans l'autre sens, le sens vertical. On prolonge la droite OB, de pente x, jusqu'à rencontrer la droite d'équation $y = 1$; ainsi le point d'intersection D est de coordonnées $\left(\frac{1}{x}, 1\right)$. Le triangle OCD est rectangle en C, avec $OC = 1, CD = \frac{1}{x}$, et d'angle β en O. Ainsi, $\frac{1}{x} = \tan(\beta)$ et $\beta = \arctan(\frac{1}{x})$.

Comme $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$, on a bien visualisé la formule (2).

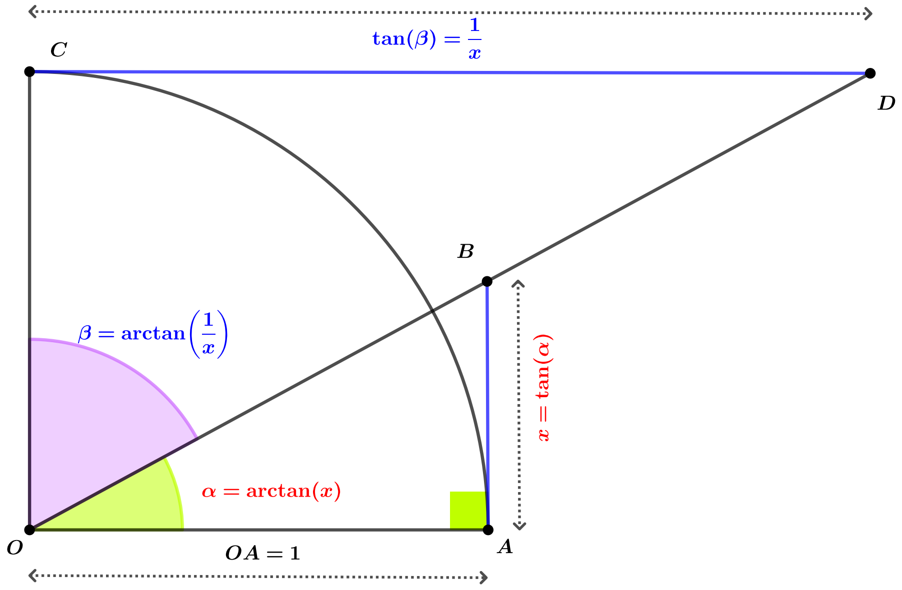

Figure 4 – $\tan(\alpha + \beta) = \dfrac{\tan(\alpha) + \tan(\beta)}{1 - \tan(\alpha) \times \tan(\beta)}$.

2. 2 Une formule plus élaborée sur l'arctangente

La formule (ou identité) que nous considérons dans ce paragraphe est bien plus élaborée ; elle est due, semble-t-il, à L. Euler. Pour $x > 0$ et $y > 0$, on a :

$$\arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \arctan\left(\frac{1}{x+y}\right) + \arctan\left(\frac{y}{x^2 + xy + 1}\right). \tag{4}$$

Cette identité peut être démontrée de diverses manières, parmi lesquelles l'utilisation (encore) du calcul différentiel (sur les fonction réelles de deux variables). Mais peut-on la “voir” sur une figure ? Eh bien, de manière assez étonnante, la réponse est oui.

Ce sera encore la même manière de faire qu'au paragraphe 1, celle d'un “triangle rectangle s'appuyant par un sommet sur un mur vertical (ou horizontal)”. Suivre sur la Figure 5.

Soit le triangle OAB, rectangle en A, de côté $OA = 1$ et $AB = x$. L'angle α en B, c'est-à-dire entre BO et BA, est tel que $\arctan(\alpha) = \frac{1}{x}$.

On prolonge AB jusqu'à C, en prenant $BC = y$. On construit le triangle OBD, rectangle en O, et on complète la figure en construisant le rectangle $DCA(O)E$.

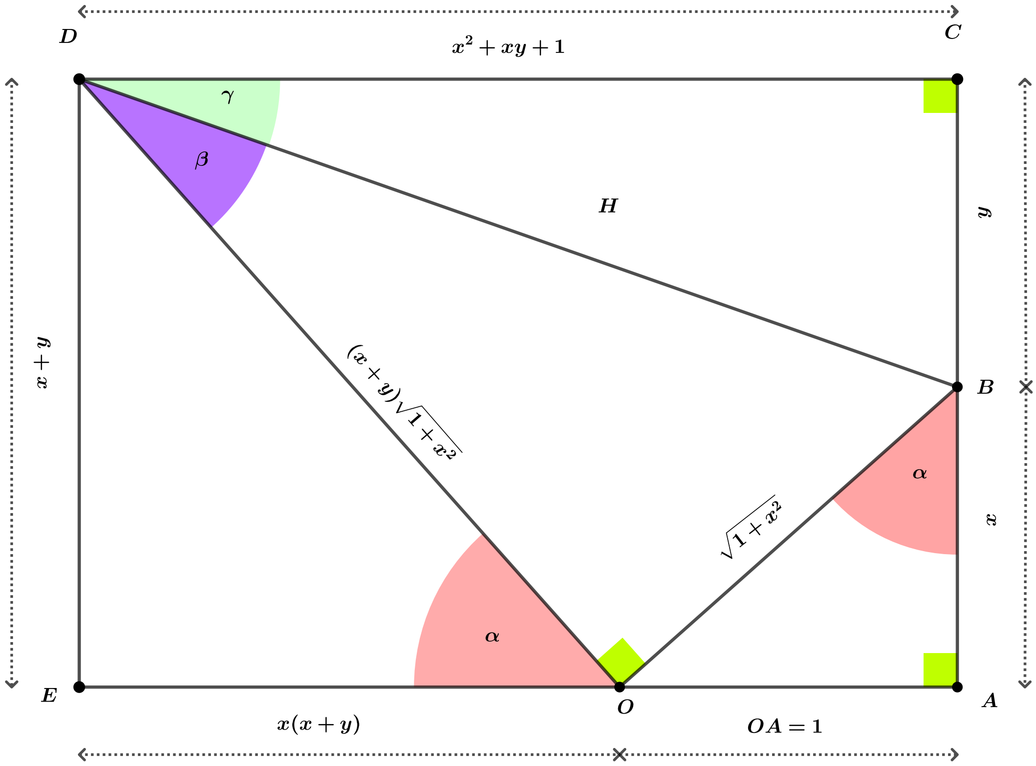

FIGURE 5 – $\arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \arctan\left(\frac{1}{x+y}\right) + \arctan\left(\frac{y}{x^2+xy+1}\right)$.

Voyons à présent ce qu'on peut dire des longueurs de segments et des angles qui apparaissent sur la figure :

- L'angle α, entre BO et BA, dont la tangente est $\frac{1}{x}$, se retrouve entre OE et OD (toujours la même technique du triangle rectangle posé sur une droite). Comme $DE = AC = x + y$, on en déduit que $OE = x(x + y)$. Par suite, $EA = EO + OA = x(x + y) + 1 = x^2 + xy + 1$; c'est aussi DC.

- Deux autres angles apparaissent : γ entre DC et DB, et β entre DO et DB.

La tangente de γ est toute trouvée, c'est $\frac{BC}{DC}$, soit $\frac{y}{x^2+xy+1}$.

La détermination de la tangente de β requiert qu'on calcule les longueurs de OB et OD. Par le théorème de PYTHAGORE, d'abord dans le triangle rectangle OAB puis dans le triangle rectangle OED, on a : $OB = \sqrt{1+x^2}$ et $OD = (x + y)\sqrt{1+x^2}$. En conséquence, $\tan(\beta) = \frac{OB}{OD} = \frac{1}{x+y}$.

Avec la relation $\alpha = \beta + \gamma$, on a bien visualisé la relation (4).

Conclusion

Avec cet échantillon de 4 exemples, choisis dans un domaine bien particulier (celui de la trigonométrie directe et inverse), nous espérons avoir suscité la curiosité, l'intérêt, peut-être la surprise, que peuvent apporter ces visualisations de résultats mathématiques, bref ces "Démos sans les mots".

Références

1. R. B. Nelsen, *Proofs without words I. Exercises in visual thinking.* Édité par The Mathematical Association of America (1993).

2. R. B. Nelsen, *Proofs without words II. More exercises in visual thinking.* Édité par The Mathematical Association of America (2000).

3. R. B. Nelsen, *Preuves sans mots. Exercices de mathématiques visuelles.* Éditions Hermann (2013). Il s'agit d'une traduction-adaptation des deux volumes [1] et [2] .

4. R. B. Nelsen, *Proofs without words III. Further exercises in visual thinking.* Édité par The Mathematical Association of America (2016).

5. R. H. Wu, *Proofs without words : some* arctangent *identities involving* 2*, the golden ratio, and their reciprocals.* Mathematics Magazine, $92 : 2, 108 - 109$ (2019).